ДОКУМЕНТ
ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ
ПОДПИСЬЮ

Сертификат:
23575740AC304DC9393B231AE66DF1D8
Владелец: Панин Игорь Константинович
Действителен: с 07.11.2022 до
31.01.2024

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
«Лицей «Школа менеджеров»

«СОГЛАСОВАНО»	«РАССМОТРЕНО»	«ПРИНЯТО»	«УТВЕРЖДЕНО»
Зам. директора _____/Кузнецова И.М../ подпись Ф.И.О.	на заседании МО от «30» августа 2021г. № 1	на заседании педагогического совета от «31» августа 2021г. №6	приказом по МБОУ «Лицей «Школа менеджеров» от «31» августа 2021г. № 185-Д

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

Элективного курса «Встречи с модулем»

Класс: 11

Всего часов: 34

Составители:
Каплина Т.А.,
учитель математики
МБОУ «Лицей
«Школа менеджеров»

Г. Новомосковск

2021 г.

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Элективный курс «Встречи с модулем» предназначен для работы с учащимися 11 класса, рассчитан на 35 часов.

Данная рабочая программа составлена на основе авторской программы элективного курса «Встречи с модулем» Никонова Е. Ю Самара, СИПКРО, выпуск 2, 2003

Элективный курс «Модуль» разработан для классов физико-математического и социально-экономического профиля в старшей школе и предназначен для организации систематического изучения вопросов, связанных с модулем. Он является предметно-ориентированным и рассчитан на учащихся, которые имеют базовую математическую подготовку.

В школьной программе понятие модуля вводится в 6 классе, где дается его геометрическое толкование. Впоследствии учащиеся лишь эпизодически встречаются с заданиями, содержащими модуль. Часто ученики такое задание воспринимают как новое и неожиданное и не знают, с какой стороны к нему подступиться. На базовом уровне учащиеся должны уметь выполнять задания стандартного вида. В процессе же изучения курса старшеклассники смогут познакомиться с различными приемами построения графиков функций, решениями уравнений и неравенств с модулем, приобретут навыки рационального поиска решения задач и построения алгоритмов, а в дальнейшем применят полученные знания и умения при подготовке к поступлению в вуз и продолжению образованию. Так как основу данного курса составляют решения разных по степени важности и трудности задач, то он способен повысить познавательный интерес учащихся к математике.

Занятия на курсе «Модуль» способствуют развитию навыков организации умственного труда и самообразования. Слушатели учатся работать с разными источниками информации.. Цель данного учебного курса создать целостное представление о теме и значительно расширить спектр задач, посильных для учащихся.

Таким образом, курс «Модуль» призван обеспечить углубленное изучение отдельного раздела математики, повысить уровень математического мышления и сформировать навыки исследовательской деятельности.

Содержание программы курса «Модуль» включает теоретический практический материал. Теоретическое содержание составляют основные понятия, способы решения задач и их обоснование. Практическое содержание - это практикум по решению задач различных типов, разного уровня сложности. В конце курса предполагается работа над проектами индивидуально или в малой группе и защита их каждым учеником по выбранному разделу спецкурса.

Целями элективного курса «Встречи с модулем» являются:

- прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений по теме «модуль», которые учащиеся могли бы применить в нестандартных ситуациях;
- развитие конструктивного и алгоритмического мышления;
- совершенствование коммуникативных способностей на основе совместных проектов, которыми планируется окончить данный курс;
- профессиональное самоопределение старшеклассников;
- обеспечить равный доступ к полноценному образованию разным категориям учащихся в соответствии с их способностями и индивидуальными склонностями и потребностями.

Задачи курса:

- повышение математической культуры учеников
- систематизация теоретических знаний учащихся, связанных с понятием модуль;
- формирование практических навыков и умений у учащихся при построении графиков функций, решении уравнений и неравенств, содержащих модуль, с использованием различных методов и приемов;
- формирование творческого мышления;
- развитие навыков исследовательской деятельности с учетом индивидуальных способностей и наклонностей каждого ученика;

Технологии обучения:
Лекционно-семинарская система обучения; Информационно-коммуникационные технологии; использование исследовательского метода, направленного на развитие логического мышления; деятельностный метод; проблемное обучение, предусматривающее мотивацию к исследованию путем постановки проблемы, обсуждение различных вариантов решения.
Позиция педагога: при проведении занятий данного элективного курса он выступает информатором только в тех случаях, когда является единственным обладателем информации. Большую часть учебного времени учитель выполняет функции советника, консультанта, поддерживающего интеллектуальную активность учащихся, и наблюдателя за процессом практической работы учеников. Позиция равноправного участника - самая предпочтительная при проведении групповых обсуждений и индивидуальной работы.

Прогнозируемые результаты:

У учащихся должны развиться навыки организации умственного труда и самообразования. Здесь и умение воспринимать объясняемый материла, достаточно быстрого его конспектировать, с одной стороны, и умение работать с учебниками и иной литературой, с другой стороны.
Учащиеся приобретут умения и навыки решения заданий с модулем. В процессе изучения курса будет решено много полезных задач, в том, числе и абитуриентского плана. Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся. Логика математического мышления помогает учащимся в рассуждениях, даже в обыденной жизни, в развитии и логическом построении речи, в способности к критическому восприятию действительности. Овладение общими умениями, навыками, способами деятельности как существенными элементами культуры является необходимым условием развития и социализации учащихся.

Учебная деятельность

Чтобы оценить динамику усвоения учениками теоретического материала и добиться от учащихся регулярных занятий, психологически очень важно предоставить подростку достаточно объективную информацию об уровне его знаний и умений, а значит, и об ожидающей его оценке. Кроме того, знание уровня владения учащимися теорией и навыками ее применения поможет внести изменения в семинарские занятия. С этой целью будут предложены небольшие домашние индивидуальные задания на выбор. Планируется выступление учеников с небольшими докладами в дополнение к лекциям учителя. Заранее подготовленное сообщение на тему, подсказанную учителем, поможет учащемуся включиться в работу на уроке, развить и проявить свое ораторское мастерство.
В конце курса предполагается работа над проектами индивидуально или в малой группе и защита их каждым учеником по выбранному разделу элективного курса.
При организации занятий необходимо планировать рефлексивную деятельность учащихся. Школьники должны понимать ценность образования как средство развития культуры личности.

Уметь объективно оценивать свои учебные достижения, учитывать мнения других людей при определении собственной позиции и самооценки.

Система оценки достижений обучающихся

Оценка элективного курса отметочная (без выставления отрицательных отметок)

Шкала оценок, которые учащиеся получают в конце изучения элективного курса:

- оценка **«отлично» (5)** – учащийся блестяще освоил теоретический материал курса, получил навыки в его применении при решении конкретных математических задач. В процессе написания и защиты проекта ученик продемонстрировал умение работать с литературными источниками. На занятиях принимал активное участие; отличался творческим подходом и большой заинтересованностью, научился находить и использовать информацию. Очевиден и несомненен его интеллектуальный рост и рост его общих умений;
- оценка **«хорошо» (4)** – учащийся освоил идеи и методы данного курса в такой степени, что может справиться со стандартным заданием. Ученик справился с выполнением проекта, но проявил чисто компилятивные способности, выполнял домашние задания. Эта оценка за усердие и прилежание. Очевиден интеллектуальный рост и возрастание общих умений слушателя курса.
- оценка **«удовлетворительно» (3)** – учащийся освоил простые идеи и методы курса, что позволило ему выполнять лишь задания общеобразовательного уровня или самого простого состава.

2. ПРОГРАММНОЕ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОСНАЩЕНИЕ ПРОГРАММЫ

Класс	Количество часов в неделю согласно УП школы			Реквизиты программы	УМК обучающихся	УМК учителя
	ФК	РК	ШК			
11			1	Авторская программа элективного курса. «Встречи с модулем» Никонова Е. Ю Самара, СИПКРО, выпуск 2, 2008	Вавилов В.В. Задачи по математике Уравнения и неравенства. М., «Просвещение», 2011	1. Вавилов В.В. Задачи по математике Уравнения и неравенства. М., «Просвещение», 2011 2. Каспаржак А.Г. «Элективные курсы в профильном обучении», М., НФПК, 2004. 3. Крамор В.С., Лунгу К.Н., Лунгу А.К. «Математика, типовые примеры на вступительных экзаменах», М., АРКТИ, 2001. 4. Литинский Г.И. Функции и графики, М., «Аслан», 1996

						5. Никонова Е.Ю. «Встречи с модулем» Самара, СИПКРО, выпуск 2, 2003г.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА

1. Определение и свойства модуля(3)

Вводная лекция. Обобщение теоретических знаний, связанных с понятием модуля. Аналитическое определение и геометрический смысл модуля. Свойства модуля. Преобразования различных выражений, содержащих знак модуля на основе его определения. Использование математической символики. Знаки совокупности и системы.

Практическая работа: преобразование выражений, содержащих знак модуля, с использованием приема «разбиения на промежутки».

2. Построение графиков функций, содержащих модули(5)

Принципы построения графиков функций с модулем:

построение графика функции $y=|f(x)|$;

построение графика функции $y=f(|x|)$;

построение графика функции $y=|f(|x|)|$

построение графика функций, содержащих модуль от выражения с переменными;

построение графика функции $|y|=|f(x)|$;

построение графика функции $|y|=f(|x|)$;

Индивидуальное задание: построение графика выбранной функции.

3. Уравнения, содержащие модули(14)

Систематизация различных видов уравнений и систем с модулем. Методы решения: раскрытие модуля исходя из определения; возведение обеих частей уравнения в квадрат; метод разбиения на промежутки; графический и аналитический способы решения уравнений и систем уравнений с модулем. Алгоритмы решения уравнений, содержащих модуль:

решение линейных уравнений;

решение квадратных уравнений;

решение тригонометрических уравнений;

решение показательных и логарифмических уравнений.

Тестирование по теме : решение уравнений с модулем с выбором рационального способа решения.

4. Неравенства, содержащие модуль(10)

Классификация различных типов неравенств с модулем и способы их решения. Алгоритмы решения неравенств, содержащих модуль.

Графический и аналитический способы решения линейных неравенств и неравенств второй степени с модулем:

неравенства, содержащие выражения $|x|$;

неравенства вида $|f(x)|>g(x)$

неравенства вида $|f1(x)|\pm|f2(x)|\pm\ldots\pm|fn(x)|> g(x)$.

Системы неравенств, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Тригонометрические неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Показательные и логарифмические неравенства с модулем.

Самостоятельная работа: решение неравенств с модулем с выбором рационального способа решения.

Модуль и параметр.

Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль и параметр.

Аналитический и графический способы решения.

5. Защита проектов(3)

Формой итогового контроля может служить защита проекта или реферата.

Школьники могут написать реферат по одной из тем изученных на элективном курсе.
Учащимся, проявляющим интерес к заданиям более высокого уровня сложности, предлагается самостоятельно изучить одну из тем с последующей презентацией:
«Абсолютная величина и параметр»
«Модуль в уравнениях с параметром»
«Неравенства с параметром, содержащие модуль»
«Конструирование задач с модулем».

4.ТРБОВАНИЯ К ЗНАНИЯМ И УМЕНИЯМ

В результате изучения курса учащиеся приобретут:
-представление об идеях и методах математики в познании действительности;
-работать с различными источниками информации;
-знания основных приемов при работе с модулем и умения:
-воспроизводить определение модуля, его свойства,
-алгоритмы построения графиков функций, содержащих модуль,
-методы решения уравнений и неравенств с модулем,
-анализировать и выбирать оптимальные способы решения,
-применять математическую символику,
-логически мыслить, рассуждать, аргументировать и анализировать полученные результаты;
-участвовать в дискуссии, отстаивая свое мнение в поиске решения задач,
-применять теоретические знания при решении нестандартных задач, содержащих модуль.

5.УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

№ п/п	Тема	Количество часов на тему		
		Общее количество	Проверочные работы	Зачеты
1.	Определение и свойства модуля	3		
2.	Построение графиков функций, содержащих модули	5	1	
3.	Уравнения, содержащие модули	14	1	
4.	Неравенства, содержащие модуль	10	1	
5.	Защита проектов(3)	3		
	Итого:	35	3	

6.КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№ урока	Дата проведения	Тема урока	Примечание
1		**Определение и свойства модуля** Аналитическое определение модуля	
2		Геометрический смысл модуля	
3		Преобразование выражений, содержащих неизвестное под знаком модуля.	
4		**Графики функций с модулем** График функции $y=f(\|x\|)$	
5		График функции $y=\|f(x)\|$	
6		График функции $y=\|f(\|x\|)\|$	
7		Графики сложных функций	
8		Графики сложных функций	

9		**Уравнения содержание модуль** Основные методы решения уравнений	
10		Линейные уравнения, содержащие модуль	
11		Линейные уравнения, содержащие модуль	
12		Квадратные уравнения, содержащие модуль	
13		Квадратные уравнения, содержащие модуль	
14		Квадратные уравнения, содержащие модуль	
15		Показательные и логарифмические уравнения с модулем	
16		Показательные и логарифмические уравнения с модулем	
17		Показательные и логарифмические уравнения с модулем	
18		Показательные и логарифмические уравнения с модулем	
19		Уравнения, содержащие модуль и параметр	
20		Уравнения, содержащие модуль и параметр	
21		Уравнения, содержащие модуль и параметр	
22		Уравнения, содержащие модуль и параметр	
23		**Неравенства со знаком модуля** Неравенства вида $\|f(x)>\|g(x)\|$	
24		Неравенства вида $\|f(x)\|<g(x)$	
25		Неравенства вида $\|f(x)\|>g(x)$	
26		Тригонометрические неравенства, содержащие знак модуля	
27		Тригонометрические неравенства, содержащие знак модуля	
28		Показательные и логарифмические неравенства с модулем.	
29		Показательные и логарифмические неравенства с модулем.	
30		Показательные и логарифмические неравенства с модулем.	
31		Неравенства, содержащие модуль и параметр	
32		Неравенства, содержащие модуль и параметр	
33		**Индивидуальная работа учащихся над проектами**	
34		Защита проектов	
35		Итоговый урок	

Семинар по теме «Построение графиков сложных функций и уравнений, содержащих модули».

Цель:

обобщение знаний учащихся по теме «Построение графиков функций, содержащих модуль»,

закрепление умений и навыков по теме;

практическое применение знаний для построения графиков сложных функций и уравнений, содержащих модуль.

Оборудование:

мультимедиа-проектор;

компьютер;

экран для проецирования;

раздаточный материал.

1.Организационный момент.

Учитель ставит цель перед учащимися: научиться строить графики сложных функций уравнений, содержащих модуль.

На каждой парте раздаточный материал.

Класс делится на 3группы. Каждая группа получает задание:

Как влияет знак модуля на свойства функции?

2.Актуализация знаний учащихся по теме.

Предлагается выслушать сообщения по темам:

а) Алгоритм построения графика функции $y=|f(x)|$ на примере ($y=|x^2-2x-3|$);

б) Алгоритм построения графика функции $y=f(|x|)$ на примере ($y=x^2-|2x|-3$);

в) Алгоритм построения графика функции $y=|f(|x|)|$ на примере ($y=|x^2-2|x|-3|$);

г) Построение графиков уравнений $|y|=x^2-2x-3$;

$|y|=|x^2-2x-3|$.

Дополнительные вопросы к выступающим ученикам.

По построенным графикам перечислить свойства функций:

1)назвать нули функции;

2)промежутки знакопостоянства;

3)промежутки монотонности;

4)точки экстремума, экстремумы функции;

5)наибольшее и наименьшее значения функции.

3.Практическое применение знаний.

а) Класс делится на 3группы. Каждая группа получает задание:

Как влияет знак модуля на свойства функции?

Работа учащихся в группах по полученным заданиям.

Заслушиваются ответы желающих учащихся от каждой группы .

б) Построить графики функций:

$y=(|x+1|+1)\ (x-3)$

$y=x3\cdot|x-3|-x2$

$$y=\begin{cases}-2x^2, если & |x|<1\\ 0, если & |x|=1\\ |x|, если & |x|>1\end{cases}$$

в) Работа в парах.

Задание: график какой функции или уравнения на рисунке?

Задания на распознавание графиков функций:

Прямая и обратная пропорциональность, линейная функция, квадратичная, степенная, показательная и логарифмическая, тригонометрическая и др. функции.

<u>Введение.</u>

1. ***Выбор темы*** - понятие функции одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью. В этом понятии ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Именно в понятии функции в определенной степени отображается бесконечное многообразие явлений окружающего нас мира. К тому же использование свойств функции эффективно (целесообразно) при решении целого ряда задач в частности при решении уравнений и неравенств;

2. ***Предмет исследования*** - понятие функции, основные ее свойства;

3. ***Объект исследования -*** уравнения и неравенства, решаемые с помощью свойств функции;

4. ***Цель работы -*** показать применение свойств функции к решению уравнений и неравенств.

2. Возрастание и убывание функции, функция $y=f(x)$ называется возрастающей на отрезке [a, b], если для любой пары точек x и x', $a\le x<x'\le b$ выполняется неравенство $f(x)\le f(x')$, и строго возрастающей – если выполняется неравенство $f(x)<f(x')$. Аналогично определяется убывание и строгое убывание функции. Например, функция $y=x^2$ строго возрастает на отрезке [0, 1], а $y=1/(x+1)$ строго убывает на этом отрезке. Возрастающие функции обозначаются $f(x)$, а убывающие $f(x)\downarrow$. Для того чтобы дифференцируемая функция $f(x)$ была возрастающей на отрезке [a,b], необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ была неотрицательной на [a,b].

Наряду с возрастанием и убыванием функции на отрезке рассматривают возрастание и убывание функции в точке. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей в точке X_0, если найдется такой интервал (α, β], содержащий точку X_0, что для любой точки x из (α,β), $x<\chi_0$, выполняется неравенство $f(\chi_0)\le f(x)$, и для любой точки x из (α,β), $x<\chi_0$, выполняется неравенство $f(x)\le f(\chi_0)$. Аналогично определяется строгое возрастание функции в точке χ_0. Если $f'(\chi_0)>0$, то функция $f(x)$ строго возрастает в точке χ_0. Если $f(x)$ возрастает в каждой точке интервала (a,b), то она возрастает на этом интервале.

3. Выпуклая функция – если на заданном интервале график функции расположен ниже любой своей касательной, то функция называется выпуклой на данном интервале.

4. Четная функция – функция $f(x)$, обладающая двумя свойствами:

а) ее область определения симметрична относительно 0.

б) для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(-x)=f(x)$.

5.Нечетная функция – функция называется нечетной, если область определения функции симметрична относительно начала координат и если для всех значений аргумента выполняется равенство: $f(-x)=-f(x)$.

6. Ограниченная функция – функция $y=f(x)$ называется ограниченной на промежутке X , если существуют числа M и N такие, что для всех x є X выполняется неравенство: $M\leq f(x)\leq N$.

7. Периодическая функция – функция $f(x)$ называется периодической, если существует такое число T не равное 0, что:

а) для любого x из области определения функции числа (x+T) и (x-T) также принадлежит области определения;

б) выполняется равенство: $f(x)=f(x+T)=f(x-T)$.

<u>Применение свойств функции при решении уравнений и неравенств.</u>

1.Область определения функции

Полезно начинать решение уравнений (неравенств) с нахождения его области допустимых значений, которая состоит из перечисления областей определения всех входящих в него функций.

Определение: Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл (определены) его левая и правая части:

Возможны случаи:

1)Область допустимых значений уравнения (неравенства) пустое множество, то при этом уравнение или неравенство решений не имеет;

2)Область допустимых значений уравнения (неравенства) конечное множество, то при этом достаточно подстановкой определить, удовлетворяют ли эти числа данному уравнению или неравенству;

3)Область допустимых значений бесконечное множество, то при решении уравнения (неравенства) используется либо функциональный подход, либо теория равносильности.

Пример 1: $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}>2$

1) находим ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x-2\geq 0, \\ 1-x\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2, \\ x\leq 1. \end{cases} \quad D(y)=\varnothing$$

2) неравенство не имеет решений

Ответ: решений нет.

2.Монотонность функции

Утверждение 1. Пусть $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке X, тогда уравнение $f(x) = C$, где C – данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке X.

Утверждение 2. Пусть f(x) и g(x) - непрерывны на множестве X функции, f(x) строго возрастает, а g(x) строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение f(x) = g(x) может иметь не более одного решения на промежутке X.

Этот факт можно применить при решении неравенств: например, дано неравенство f(x) < g(x), причем функция f(x) строго возрастает, а g(x) строго убывает и пусть при x = a левая и правая части равны, тогда данное неравенство справедливо для x<a, но при этом следует учесть

область определения неравенства. Для наглядности можно построить график функций f(x) и g(x).

При решении уравнений вида f(g(x)) =f(h(x)) (1) полезны следующие утверждения:

Утверждение 3. Решения уравнения g(x)= h(x) (2), содержащиеся в ОДЗ уравнения (1), являются решениями уравнения(1).

Утверждение 4. Если f(x) – строго монотонная функция, то уравнения (1) и (2) равносильны на ОДЗ уравнения (1). Это утверждение справедливо и в том случае, если функция f(x) строго монотонна на множестве значений функций g(x) и h(x).

При решении неравенств вида f(g(x)) < f(h(x)) f(g(x)) > f(h(x)) осуществляют переход к неравенствам вида g(x) < h(x) (g(x)>h(x)) с учетом монотонности функции f(x) и знака данного неравенства.

Утверждение 5. Если функция f(x) строго возрастает на множестве X и f(x) $\in$X для $\forall x \in$X,тогда уравнения f(x)= x, f(f(f(x))) = x и т.д. равносильны на множестве X.

С уравнением вида f(f(x)) = (3) тесно связано уравнение вида f(x) =$f^{-1}(x)$ (4), где f(x) - некоторая функция, а $f^{-1}(x)$ - функция обратная к функции f(x). Так как $f(f^{-1}(x))$≡x, то решения уравнения (4) Являются корнями уравнения (3).

При решении неравенств вида f(f(x)) <x (f(f(x)) >x) осуществляют переход к неравенствам вида f(x) <x (f(x) >x), учитывая при этом монотонность функции f(x) и знак данного неравенства.

Пример 2: $\sqrt[6]{x-2}+\sqrt[5]{2x-5}=2$

1)находим ОДЗ: x≥2

2)Функция, стоящая в левой части уравнения монотонно возрастающая, как сумма двух возрастающих, значит, уравнение по утверждению 1 имеет не более одного корня. Находим его подбором x=3.

Ответ: x=3.

Пример 3: $\sqrt[8]{2-x^2}>x^3+x-1$

1)находим ОДЗ: $x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

2) Введем в рассмотрении функции $f(x)=\sqrt[8]{2-x^2}$ и $g(x)=x^3=x-1$.

Разобьем ОДЗ на два промежутка: $\left[-\sqrt{2},0\right];\left[0,\sqrt{2}\right]$. Если $x\in\left[-\sqrt{2},0\right]$, то $f(x)>0$, $g(x)<0 \Rightarrow$ неравенство $f(x)>g(x)$ справедливо для таких x.

Если $x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$,то функция $f(x)$ убывает, а g(x) возрастает, тогда неравенство $f(x)>g(x)$ будет выполнятся для x<1, где x=1 корень уравнения $f(x)=g(x)$. Значит, неравенство $f(x)>g(x)$ выполняется при $x\in\left[0,1\right)$. Объединяя эти решения получим окончательный ответ, что $x\in\left[-\sqrt{2},1\right)$.

Ответ: $x\in\left[-\sqrt{2},1\right)$.

3. Четность функции

Применение свойства четности ил нечетности функций способствует рационализации самих решений уравнений (неравенств).

Пусть имеем уравнение или неравенство $f(x)=0$ $f(x)>0$ ($f(x)<0$), где $f(x)$ – четная или нечетная функция.

Область определения такой функции симметрична относительно нуля (необходимое условие). Для любых симметричных значений аргумента из области определения четная функция принимает равные числовые значения, а нечетная равные по абсолютной величине, но противоположного знака.

Пример 4: $8^{|x|}=2^{|x+2|+|x-2|}$

1)ОДЗ: $x\in R$

2) Введем в рассмотрении функции $f(x)=8^{|x|}$ и $g(x)=2^{|x+2|+|x-2|}$. Функции $f(x)$ и g(x) четные, поэтому сначала найдем решения на промежутке x≥0.

Проверим, является ли x=0 корнем уравнения: $8^0\neq 2^{2+2}\Rightarrow x=0$ не является корнем уравнения.

Разобьем промежуток $(0,+\infty)$ на два промежутка: $(0,2],(2,+\infty)$.

а) $x\in(0,2]$

$8^x=2^{x+2-x+2}\Leftrightarrow 2^{3x}=2^4\Leftrightarrow 3x=4\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}$

б) $x\in(2,+\infty)$

$8^x=2^{x+2+x-2}\Leftrightarrow 2^{3x}=2^{2x}\Leftrightarrow 3x=2x\Leftrightarrow x=0$

Но т.к. x=0 не является корнем уравнения, то на промежутке x>0 данное уравнение имеет корень $x=\frac{4}{3}$. В силу четности функции $x=-\frac{4}{3}$ также корень уравнения.

Ответ: $x=\pm\frac{4}{3}$.

4. Периодичность функции

Число Т называется периодом функции. Всякая периодическая функция имеет бесконечно много периодов, т.к. если число Т – один из ее периодов, то всякое число Тm, $m \in Z$ также будет периодом этой функции. Чаще всего из множества периодов функции выбирают положительный наименьший период.

Теорема 1. Если функция f периодическая и имеет период Т, то функция $Af(kx+b)$, где A, k, b постоянные, а $k \neq 0$ так же периодична. Причем период равен $\frac{T}{|k|}$.

Теорема 2. Если функция g периодическая и имеет период Т, а функция f определена на $E(g)$, то функция $y=(g(x))$ имеет тот же период.

Если функция $f(x)$- периодическая, то решение уравнения $f(x)=0$ или неравенства $f(x)>0$ ($f(x)<0$) достаточно найти на промежутке, равном по длине периоду функции, после чего записывается общее решение. Если периодическая функция еще и четная или нечетная, то решение достаточно найти на промежутке, равном по длине половине периода.

Пример 5: $\cos x \cdot \cos 3x < \cos 5x \cdot \cos 7x$

1) находим ОДЗ: $x \in R$

2)эквивалентными преобразованиями придем к неравенству:

$\cos 4x - \cos 12x < 0$

Рассмотрим функцию

$f(x) = \cos 4x - \cos 12x = 2\sin 8x \cdot \sin 4x$.

Ее период $T = \frac{2\pi}{НОД(4,12)} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, решение уравнения достаточно найти на промежутке, равном по длине периоду функции. Так ка функция четная, то за такой промежуток возьмем $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ и решения достаточно найти лишь на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Функция на данном промежутке имеет два корня: 0, $\frac{\pi}{8}$, - которые разбивают промежуток $\left[0; \frac{\pi}{4}\right)$ на два интервала знакопостоянства: $\left(0; \frac{\pi}{8}\right), \left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right)$.

Неравенство выполняется для всех $x \in \left(\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right)$. Но тогда оно будет выполняться и для $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}\right)$.

Учитывая периодичность функции, запишем общее решение неравенства

$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n$, $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$.

Ответ:

$$-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n<x<-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n\,,\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n<x<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n,\ n\in Z$$

5. Ограниченность функции

Справедливо утверждение: если функция определена и монотонна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке.

Ограниченность функции легко прочитать по ее графику: если функция ограничена снизу (сверху), то ее график целиком расположен выше (ниже) некоторой горизонтальной прямой.

Теорема 1. Если функция f(x) непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Определение 1. Число $m(M)$ называется наименьшим (наибольшим) значением функции $y=f(x)$ на множестве X $\subset D(f)$, если

1. В X существует такая точка x_0, что $f(x)=m(f(x_0)=M)$
2. для всех x из X выполняется неравенство $f(x)\geq f(x_0)$ $(f(x)\leq f(x_0))$.

Определение 2. Точка $x=x_0$ называют точкой минимума функции если $y=f(x)$ этой точки существует окрестность для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство $f(x)>f(x_0),\ x\neq x_0$.

Определение 3. Точка $x=x_0$ называют точкой максимума функции $y=f(x)$, если у этой точки существует окрестность для всех точек которой (кроме самой точки $x=x_0$) выполняется неравенство $f(x)<f(x_0), x=x_0$.

Точки максимума и минимума функции объединяют общим термином – точки экстремума.

Теорема 2. (необходимое условие экстремума). Если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=x_0$, то в это точке производная функции либо равна 0, либо не существует.

Теорема 3. (достаточное условие экстремума). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка некоторую точку $x=x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)<0$,а при $x>x_0$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, то $x=x_0$ - точка минимума функции $y=f(x)$.

б) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней при $x<x_0$ выполняется неравенство $f'(x)>0$, а при $x>x_0$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, то $x=x_0$ точка максимума функции $y=f(x)$.

Теорема 4. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значения.

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную точку экстремума $x = x_0$. Тогда:

а) если $x = x_0$ точка максимума , то $y_{наиб} = f(x_0)$;

б)если $x = x_0$ точка минимума, то $y_{наим} = f(x_0)$.

Пример 6: $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$

1)находим ОДЗ:

введем в рассмотрение функции $f(x) = \sin(x^3 + 3x^2 + 1)$ и $g(x) = x^2 + 2x + 3$

$D(f) = R, D(g) = R, D(f) \cap D(g) = R$

2) находим области значения функций $f(x)$ и $g(x)$

Функция $y = \sin x$ ограниченная и $E(y) = [-1,1] \Rightarrow E(f) = [-1,1]$

$g(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2 \Rightarrow E(g) = [2,+\infty)$ $E(f) \cap E(g) = [-1,1] \cap [2,+\infty) = \varnothing$

3) уравнение решений не имеет

Ответ: решений нет.

6.Уравнения с параметром

Найти все значения параметра а, при которых имеет решение уравнение

Пример 7: $2\cos^2\left(2^{2x-x^2}\right) = a + \sqrt{3}\sin\left(2^{2x-x^2+1}\right)$.

1)найдем ОДЗ переменной и параметра: $a, x \in R$.

2)приведем уравнение к виду $f(x) = a$. Введем замену $t = 2^{2x-x^2}$.Тогда уравнение примет вид:

$$2\cos^2 t = a + \sqrt{3}\sin 2t \Leftrightarrow 1 + \cos 2t = a + \sqrt{3}\sin 2t \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t = \frac{a-1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a-1}{2} (*).$$

3)Определим какой подход более целесообразен для решения данного уравнения: в левой части уравнения стоит ограниченная функция, поэтому данное уравнение следует решать с применением свойства ограниченности функции.

4) Найдем множество значений функции, стоящей в левой части уравнения (*).

Функция $t = 2^m$, где $m = 2x - x^2$ возрастает, значит, она достигает своего наибольшего значения при наибольшем значении m . Но $m = 2x - x^2$ имеет наибольшее значение, равное 1 (абсцисса вершины параболы $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{-2}$ *1).* Тогда $t_{наиб} = 2^{2\cdot 1-1} = 2$. Т.о., множеством значений функции $t = 2^{2x-x^2}$ является промежуток $(0;2]$.

$0 < t \le 2 \Rightarrow 0 \le 2t \le 4 \Rightarrow \frac{\pi}{3} < 2t + \frac{\pi}{2} \le 4 + \frac{\pi}{3}$.

На интервале $(0;\pi)$ функция $y = \cos x$ убывает и при этом $-1 \le \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) < \frac{1}{2}$.

Следовательно, исходное уравнение имеет решение для тех и только тех значений а, которые удовлетворяют неравенствам

$-1 \le \frac{a-1}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -1 \le a < 2.$

Ответ: $-1 \le a < 2$.

Заключение.

Сфера приложений математики расширяется с течением времени, и темп этого расширения возрастает. Если в 18 в. Математика стала основой механики и астрономии, то уже в 19 в. Она стала необходимой для различных областей физики, а ныне математические методы проникают даже в такие, казалось бы далекие от математики области знания, как биология, лингвистика, социология и т.д. Каждая новая область приложений влечет создание новых глав внутри самой математики. Эта тенденция привела к возникновению значительного числа отдельных математических дисциплин, различающихся по областям исследования (теория функций комплексного переменного, теория вероятностей, теория уравнений математической физики и т.д.; более новые – теория информации, теория автоматического управления и т.д.). Несмотря на такую дифференциацию, математика остается единой наукой. Это единство сохраняется благодаря развитию и совершенствованию ряда общих, объединяющих идей и точек зрения. Тенденция к объединению лежит в существе математики как науки, пользующейся методом абстракции и , кроме того, часто стимулируется тем, что при исследовании задач. Возникающих в различных областях знания, приходится пользоваться одним и тем же математическим аппаратом.

В указанной работе продемонстрировано использование свойства (монотонность, выпуклость, возрастание, убывание, четность, нечетность, ограниченность, периодичность) функции к решению уравнений и неравенств и на примере продемонстрировано их применение при решении параметрических уравнений.

Список литературы.

1. Агаханов Н. Х. Школьные математические олимпиады. Москва: Дрофа, 1999. 127с.
2. Большая математическая энциклопедия для школьников и студентов. Москва: Издательство «ОЛМА-ПРЕСС», 2004. 639с.
3. Виленкин Н. Я., Дуничев К.И., Калужнин Л.А., Столяр А.А. Современные основы школьного курса математиеи. Москва: Просвещение, 1980.239с.

4. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики. Москва: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1971. 95с.
5. Гурский И.П. Функции и построение графиков. Пособие для учителей. Москва: Государственное учебно-педагогическое издательство министерство просвещение РСФСР. 1961. 215с.
6. Карп А.П. Даю уроки математики. Книга для учителя. Москва: Просвещение, 1992. 192с.
7. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Москва: Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1987. 431с.
8. Коржавина М.В. Решение задач на наибольшее и наименьшее значение функции одной переменной. Самара, 1999. 17с.
9. Корейнин Я.Л. Функции. Пределы. Уравнения и неравенства с параметрами: Теория и решение задач. Москва: Просвещение. 1995. 336с.
10. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению задач школьной математики. Практикум по алгебре. Москва: Просвещение, 1976. 215с.
11. Математика. Алгебра. Функции. Фнализ данных. 9 класс. Учебник для общеобразовательных учебных заведений пол редакцией Г.В. Дорофеева. Москва: Дрофа,2000. 351с.
12. Мордкович А.Г. Алгебра 7-9 класс. Методическое пособие для учителя. Москва: Мнемозина, 2000. 143с.
13. Новичкова Н.С., Садыкова Л.К. Свойства функций при решении нестандартных уравнений и неравенств. Методическая разработка по курсам элементарной математики и методики преподавания математики. Самара: СГПУ, 2005. 90с.
14. Фомин А.А., Кузнецова Г.М. Международные математические олимпиады. Москва: Издательский дом «Дрофа», 1998. 160с.
15. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. Москва: Аванта +, 1988. 685с.

Методические рекомендации к заданию №1

Цель занятия: повторить геометрический смысл модуля, ввести аналитическое понятие модуля; изучить основные свойства модуля; научить преобразовывать выражения, содержащие знак модуля.

Начать занятие можно с выполнения заданий:

Изобразите на координатной прямой решение уравнений:

$|x| = 5$; $|x| = 0$; $|x| = -7$;

и решение неравенств:

$|x| \geq 2$; $|x| \succ -2,3$; $|x| \leq 4$; $|x| \prec -1,7.$

В процессе решения данных упражнений повторяется геометрический смысл понятия и в результате учащиеся делают вывод:

Модулем $|a|$ действительного числа а называется число а, если а положительно или равно нулю, и число –а, если а отрицательно, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, если a \geq 0 \\ -a, если a \prec 0 \end{cases}$$

В ходе занятия учащиеся должны изучить основные свойства модуля:

1. $|a| \geq 0$ для любого значения а.

2. $|a| = |-a|$ для любого значения а.

3. $|a \cdot в| = |a| \cdot |в|$ для любых значений а и в.

4. $\left|\frac{a}{в}\right| = \frac{|a|}{|в|}$ для любых значений а и для любых значений в отличных от нуля.

Доказать эти свойства можно предположить самостоятельно в качестве домашнего задания. Необходимо также обратить внимание на свойство арифметического квадратного корня: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Обобщить его на $\sqrt[2к]{a^{2к}} = |a|$, где $к \in N$. При преобразовании выражения прежде всего надо раскрыть модуль – значит записать выражение содержащее модуль , не используя знак модуля.

При преобразовании выражений, содержащих неизвестное под знаком модуля, используется так называемый прием « разбиения на промежутки», основанный на раскрытии модуля по определению.

Пример1. Раскрыть модуль : 13-2$|x|$.

Решение: Согласно определению модуля, выражение $|x|$ раскрывается по-разному в случае, когда $x \geq 0$ и когда $x \prec 0$ ё Поэтому выражение 13-2$|x|$ также будет иметь разный вид в зависимости от значения неизвестного х6

$13 - 2|x| = 13 + 2x$, если $x \prec 0$,

$13 - 2|x| = 13 - 2x$, если $x \geq 0$.

Ответ: 13-2$|x|$= $\begin{cases} 13 + 2x, если x \prec 0; \\ 13 - 2x, если x \geq 0. \end{cases}$

Пример 2. Раскрыть модуль: $|3 - 2x|$.

Решение. Под знаком модуля стоит выражение 3-2х. В таком случае модуль раскрывается в зависимости от знака выражения 3-2х. Поступим следующим образом:

1) найдем то значение х, при котором выражение стоящее под знаком модуля, обращается в нуль:

3-2х=0 откуда

х=1,5;

2) разобьем числовую прямую найденной точкой х=1,5 на два промежутка:

(I) х<1,5 и (II) $x \geq 1,5$;

3) на каждом из полученных промежутков поределим знак выражения, стоящего под знаком модуля, и раскроем модуль:

I. Если х<1,5 , то 3-2х>0 и $|3 - 2x| = 3 - 2x$.

II. Если $x \geq 1,5$, то $3 - 2x \leq 0$ и $|3 - 2x| = -(3 - 2x) = -3 + 2x = 2x - 3$.

Заметим, что граничную точку х=1,5 можно включить в любой из промежутков.

Ответ: $|3-2x| = \begin{cases} 3-2x, если x \prec 1{,}5; \\ 2x-3, если x \geq 1{,}5 \end{cases}$

Вывод:

Чтобы преобразовать выражение вида $|f(x)|$, нужно использовать алгоритм:

1) найти нули функции y=f(x): $x_1 \angle x_2, \angle ... \angle x_n$
2) разбить область определения функции найденными точками на промежутки:

I. $x \leq x_1$,

II. $x_1 \prec x \leq x_2$,

……..

N. $x_{n-1} \prec x \leq x_n$,

N+1. $x \succ x_n$

3) на каждом промежутке определить знак выражения f(x), соответственно чему и раскрыть модуль;
4) собрать результаты, полученные на каждом промежутке, и записать ответ.

Пример 3. Раскрыть модуль:

$$|x^2 - 2|x| - 3|.$$

Решение. Если выражение содержит один модуль в другом, то сначала раскрывают внутренний модуль, затем-внешний.

1. раскроем внутренний модуль выражения:

$$|x^2 - 2|x| - 3|. = \begin{cases} |x^2 - 2x - 3|, если x \geq 0 \\ |x^2 + 2x - 3|, если x \prec 0 \end{cases}.$$

2. раскроем каждый из полученных внешних модулей на соответствующих промежутках:

раскроем модуль $|x^2 - 2x - 3|$ при $x \geq 0$.

1. нули функции y= $x^2 - 2x - 3$: x= -1 и x=3, но только 3 принадлежит взятому промежутку;
2. промежуток $x \geq 0$ разбивается точкой 3 на два промежутка $0 \leq x \prec 3$ и $x \geq 3$.

3. определим знак выражения $x^2 - 2x - 3$ на каждом из промежутков и раскроем модуль:

если $0 \leq x \prec 3$, то $x^2 - 2x - 3$ <0 и $|x^2 - 2x - 3| = -x^2 + 2x + 3$;

если $x \geq 3$, то $x^2 - 2x - 3 \succ 0$ и $|x^2 - 2x - 3| = x^2 - 2x - 3$.

раскроем модуль $|x^2 + 2x - 3|$ при x<0.

1) нули функции y= $x^2 + 2x - 3$; x= -3, x=1; но только -3 принадлежит рассматриваемому промежутку.
2) Промежуток x<0 разбивается точкой -3 на два промежутка $x \leq -3$ и $-3 \prec x \prec 0$.

3) Определим знак выражения $x^2 + 2x - 3$ на каждом из полученных промежутков и раскроем модуль:

Если $x \le -3$, то $x^2 + 2x - 3 \succ 0$ и $|x^2 + 2x - 3| = |x^2 + 2x - 3|$;

Если $-3 \prec x \prec 0$, то $x^2 + 2x - 3 \prec 0$ и $|x^2 + 2x - 3| = -x^2 - 2x + 3$.

Собрав воедино полученные на каждом промежутке результаты, запишем ответ:

$$\left|x^2 - 2|x| - 3\right| = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, если x \le -3 \\ -x^2 - 2x + 3, если -3 \prec x \prec 0 \\ -x^2 + 2x + 3, если 0 \le x \prec 3 \\ x^2 - 2x - 3, если x \ge 3 \end{cases}$$

<u>Вывод:</u> в общем случае получаем:

$$f(x) = \begin{cases} f(x), если x \ge 0 \\ f(-x), если x \prec 0 \end{cases} \qquad |f(x)| = \begin{cases} f(x), если f(x) \ge 0 \\ -f(x), если f(x) \prec 0 \end{cases}$$

Для закрепления изученного материала для самостоятельного решения с последущим разбором на занятии, можно предложить следующие задания:

<u>Раскройте модуль:</u>

I $|x - 1|$

$|x^2| + 3|x| + 2$

$x - |x|$

$\dfrac{x + 3|x|}{|x|}$

$|x|^2 - 6|x| - 7$

II. $|x^2 - 4x + 3|$ $\quad |x^2 - 2x - 3| + x^2 + 2x$

III. $|4 - x| + |x + 5| - 2x$ $\quad |x^2 - 5x + 4| - |x^2 + 5x + 4|$ $\quad |x^2 - 4| - |1 - x|$

IV. $|x^2 + |x||$ $\quad |x^2 - 2|x| - 3|$ $\quad |||x - 1| - 2| - 3|$

История развития понятия функция.

Понятие функции одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью: в нем ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Именно в понятии функции в определенной степени отображается бесконечное многообразие явлений окружающего нас мира.

Понятие функция уходит своими корнями в ту далекую эпоху, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Они еще не умели считать, но уже знали, например, что чем больше олений удастся убить на охоте, тем дольше племя будет избавлено от голода.

Высокого уровня достигла математика в древнем Вавилоне. Чтобы обеспечить вычисления, вавилоняне составили таблицы квадратов и кубов чисел и даже таблицы для суммы квадратов чисел и их кубов. Говоря современным языком, это было табличное значение функции $Y = \frac{1}{X}$, $Y = X^2$, $Y = X^3$, $Y = X^2 + X^3$. Пользуясь этими таблицами, вавилоняне могли решать и обратные задачи.

А.Н. Оресси в 14в. пытался графически изображать зависимости.

Чтобы создать математический аппарат для изучения движений, понадобилось понятие переменной величины, которое ввел Р. Декарт. Отношения между известными и неизвестными величинами Декарт выражал в виде уравнений, которые изображал геометрически.

В своей «Геометрии» Декарт писал: «Придавая линии у последовательно бесконечное множество различных знаний, мы найдем также бесконечное количество знаний х и, т.о., получим бесконечное количество различных точек, они опишут требуемую кривую линию». Здесь ясно выражена идея функциональной зависимости у от х, идея геометрического выражения этой зависимости, или, как мы сказали бы теперь, графика функций.

Понятие функции сложилось не сразу. Первые попытки очертить контуры этого понятия предприняли в конце XVII в. один из родоначальников математического анализа Готфрид Вильгельм Лейбниц, а также его ученики и последователи. Сам термин «Функция» принадлежит Лейбницу и происходит от латинского слова function, что означает «выполнение», «осуществление». Речь шла об отрезках, касательных к кривым,

их проекциях на оси координат и о «другого рода линиях, выполняющих для данной фигуры некоторую функцию».

Лишь Иоганн Бернулли дал определение функции, свободное от геометрического языка: «Функцией переменной величины называется количество, образованное каким-то образом из переменной величины и постоянных величин».

Чтобы определение функции, данное Иоганном Бернулли, стало полноценным, надо было условиться, какие способы задания функций следует считать допустимыми. Обычно считали, что допускаются функции, заданные выражениями, в которые входят числа, буквы, знаки арифметических действий, возведения в степень и извлечения корней, а также обозначение тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных и логарифмических функций. Такие функции назвали элементарными. Но интегралы от них не всегда выражаются через элементарные функции. Т.о., понадобилось новое определение, которое ввел в XVIII в. Л.Эйлер в своем учебнике, говоря, что «когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых». В одной из работ он даже говорит о графике функций как о кривой, начерченной «свободным влечением руки». Функция - это то, что можно «вычертить карандашом на листе бумаги».

Но бытовало мнение, что функция не может выражаться несколькими формулами. Поэтому в конце XVIII в.математики, давая определение функции, уклонялись от ответа на вопрос, как же она выражается. Например, французский математик Лакруа писал: «Всякое количество, значение которого зависит от одного или многих количеств, называется функцией этих последних, независимо от того, известно или нет, какие операции нужно применить, чтобы перейти от них к первому…».

Окончательный разрыв между понятиями функции и ее аналитического выражения произошло начале XIX в. Французскому математику Фурье функция удалось доказать, что любые встречающиеся в практических вопросах функции, имеющие период, можно представить в виде суммы бесконечного ряда.

После работы Фурье стало ясно, что несущественно, каким аналитическим выражением задана функция. А существо дело в том, какие значения принимает функция при заданных значениях аргумента.

После длительного уточнения этой идеи, в котором приняли участие Фурье, Лобачевский, Дирихле и др., общепризнанным стало следующее определение:
Переменная величина y называется функцией переменной величины x, если каждому значению величины x соответствует определенное значение величины y.

Но и это определение стало казаться математикам второй половины XIX в. Недостаточно строгим и общим. Изощренные в исследование функции, незаданных никаким аналитическим выражением, функций, нигде не имеющих производной, они подвергали сомнению слова«переменная величина», входившие в это определение. Ведь понятие переменной

величины было не столь математическим, сколько физическим, его трудно было пояснить, не прибегая к наглядным образам. А главное – это определение говорило лишь о числах, о соответствиях между числами. Но если отказаться от аналитического задания функций, то можно рассматривать соответствие между любыми объектами.

В 1834 г. Лобачевский писал: «Общее понятие функции требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбрать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать и оставаться неизвестной».

Столь общий подход к понятию функции, при котором отождествляются понятия функции, отображения, оператора, мог возникнуть лишь после того, как во второй половине XIX в.было введено общее понятие множества. И именно творцы теории множеств Г.Кантор и Р.Дедекинд дали общее определение отображения. Его можно сформулировать так:

Пусть X и Y – два множества; говорят, что задано отображение f множества X в множество Y, если для каждого элемента x из X указан соответствующий ему элемент y из Y. Этот элемент y называется образом элемента x при отображении f и обозначается $f(x)$. Т.о., числовые функции числового аргумента являются отображениями одного числового множества в другое.

В XX в. понятия функции подверглось дальнейшим обобщениям. Возникло понятие функции, отражавшее свойства физических величин, сосредоточенных в отдельных точках, на линиях или поверхностях.

В основе всех замысловатых построений лежала одна и та же мысль о существовании взаимозависимых величин, знание значения одной из которых позволяет найти значение другой величины.

Теория функций.

Раздел математики, в котором изучаются общие свойства функций. Функций теория распадается на две части: теория функций действительного переменного и теория функций комплексного переменного.

В «классическом» математическом анализе основным объектом изучения являются непрерывные функции, заданные на (конечных или бесконечных) интервалах и обладающие более или менее высокой степенью гладкости. Однако уже со 2-й половины 19 в. Развитие математики все настоятельнее стало требовать систематического изучения функций более общего типа. Основной причиной этого является то, что предел последовательности непрерывных функций может быть разрывен. Иными словами, класс непрерывных функций оказывается незамкнутым относительно важнейшей операции анализа – предельного перехода. В связи с этим функций, определяемые при помощи таких классических средств, как

тригонометрические ряды, часто оказываются разрывными или недифференцируемыми. По той же причине могут быть разрывны производные не прерывных функций и т.п. Наконец, дифференциальные уравнения, возникающие при рассмотрении физических задач, иногда не имеют решений в классе достаточно гладких функций, но имеют их в более широких классах функций (если надлежащим образом сообщить само понятие решения). Весьма важно, что именно эти обобщенные решения и дают ответ на исходную физическую задачу. Эти и аналогичные им обстоятельства стимулировали создание функций теорию действительного переменного.

Отдельные частые факты теории функций действительного переменного были открыты еще в 19 в. (существование рядов непрерывных функций с разрывной суммой, примеры нигде не дифференцируемых непрерывных функций, не интегрируемых функций и т.п.) Однако эти факты воспринимались обычно как «исключения из правил» и не объединялись никакими общими схемами. Лишь в начале 20 в., когда в основу изучения функции были положены методы множеств теории, стала развиваться систематически современная теория функций действительного переменного.

Можно различить три направления в теории функций действительного переменного.

1. Метрическая теория функций, где свойства функций изучаются при помощи меры тех множеств, на которых эти свойства имеют место. В метрической теории функций с общих точек зрения изучаются интегрирование и дифференцирование функций, различными способами обобщается понятие сходимости функциональных последовательностей, исследуется строение разрывных функций весьма широкого типа и т.п. Важнейшим классом функций, изучаемым в метрической теории функций, являются измеримые функции.
2. Дескриптивная теория функций, в которой основным объектом изучения является операция предельного перехода.
3. Конструктивная теория функций, изучающая вопросы изображения произвольных функций при помощи надлежащих аналитических средств.

<u>Различия в определениях функций.</u>

В настоящее время существует несколько вариантов определения понятия функции. В частности, понятие функции может выступать как первичное (неопределяемое) математическое понятие. При другом варианте первичным считается понятие отображения, под функцией же понимается отображение одного числового множества в другое. Понятие функции можно трактовать и как особое отношение, установленное между элементами множеств. Наконец, функция может быть определена, как некоторое соответствие между элементами множеств даже как подмножество декартова произведения X*Y.

Пусть даны множества T и P. Если каждому элементу x множества T соответствует вполне определенный элемент y множества P, то говорят, что мы имеем отображение множества T в множество P или что мы имеем функцию с областью определения T со значениями из P. [9]

Переменная величина y называется функцией от переменной величины x (аргумента), если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y.[5]

Мы говорим, что y есть функция величины x, если:

1. указанно, какие значения x являются допустимыми, т.е. задана область определения функции
2. каждому допустимому значению x соответствует в точности одно значение величины y.[4]

Пусть X – числовое множество. Правило, сопоставляющее каждому числу x из X некоторое число y, называют числовой функцией, заданной на X.[2]

<u>Основные свойства функций.</u>

1.***Монотонная функция*** (от греч. Monotonos – однотонный), функция, приращения которой $\Delta f(x)=f(x') - f(x)$ при $\Delta x=x'-x>0$ не меняют знака, т.е. либо всегда неотрицательны, либо всегда неположительны. Выражаясь не совсем точно, монотонная функция – это функции, меняющиеся в одном и том же направлении. Различны типы монотонной функции представлены на прилагаемой таблицы:

$\Delta f(x)\geq 0$	Неубывающая	
$\Delta f(x)\leq 0$	Невозрастающая	
$\Delta f(x)>0$	Возрастающая	
$\Delta f(x)<0$	Убывающая	

Например, функция $Y = X^3$ является возрастающей функцией. Если функция $f(x)$ имеет в каждой точке производную $f'(x)$, которая неотрицательна и обращается в нуль лишь в конечном числе отдельных точек, то $f(x)$ – убывающая функция.

Условие монотонности может выполняться как для всех x, так и для x из некоторого интервала (или отрезка). В этом последнем случае функцию называют монотонной на этом интервале (или отрезке). Например, функция $Y = \sqrt{1 - X^2}$ возрастает на отрезке [-1,0] и убывает на отрезке [0,+1].

Монотонные функции представляют собой один из простейших классов функций и постоянно встречаются в математическом анализе и теории функций.

Если $f(x)$ – монотонная функция, то для любого X_0 существуют пределы

$$f\left(X_0+0\right)=\lim_{\hbar\to+0}\int\left(X_0+\hbar\right)$$

$$\int\left(X_0-0\right)=\lim_{\hbar\to-0}\int\left(X_0+\hbar\right)$$

I. Пояснительная записка.

Составлена данная программа на основе программы учителя математики высшей категории Гришиной Ирины Ивановны, г. Самара Кировского района.

Элективный курс «Встречи с модулем» разработан для классов информационно-технологического и социально-экономического профиля в старшей школе и предназначен для организации систематического изучения вопросов, связанных с модулем. Он является предметно-ориентированным и рассчитан на учащихся, которые имеют базовую математическую подготовку.

Целями элективного курса «Встречи с модулем» являются:

- прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений по теме «модуль», которые учащиеся могли бы применить в нестандартных ситуациях;
- развитие конструктивного и алгоритмического мышления;
- совершенствование коммуникативных способностей на основе совместных проектов, которыми планируется окончить данный курс;
- профессиональное самоопределение старшеклассников;
- обеспечить равный доступ к полноценному образованию разным категориям учащихся в соответствии с их способностями и индивидуальными склонностями и потребностями.

Задачи курса:

- повышение математической культуры учеников
- систематизация теоретических знаний учащихся, связанных с понятием модуль;
- формирование практических навыков и умений у учащихся при построении графиков функций, решении уравнений и неравенств, содержащих модуль, с использованием различных методов и приемов;
- формирование творческого мышления;
- развитие навыков исследовательской деятельности с учетом индивидуальных способностей и наклонностей каждого ученика;
- подготовка учащихся к поступлению в вуз и продолжению образованию.

Изменения во многих сферах социально-экономической жизни не могут не отражаться на состоянии школьного образования. Быстро меняющаяся действительность требует от выпускников школы не только определенного уровня знаний, но и наличия определенного интереса к познанию, навыков самостоятельного альтернативного мышления, умений быстро адаптироваться, выживать, используя свой творческий потенциал.

Основная идея обновления современной школы состоит в том, что образование должно стать более индивидуализированным, функциональным и эффективным. Профильное обучение – особый вид дифференциации и индивидуализации обучения; форма организации учебной деятельности старшеклассников, при которой учитываются их интересы, склонности и способности, создаются условия для максимального развития учащихся в соответствии с их познавательными и профессиональными намерениями.

Среди школьных предметов математика занимает совершенно особое место. Математика используется в самых разнообразных профессиях - инженер, военный, биолог, конструктор, программист и др. Для одной профессии она нужна больше, для другой - меньше, но все равно нужна. Элективные курсы по математике дают возможность проверить и оценить учащимся свои способности к математике, ориентацию на профессию и повысят вероятность того, что

выпускник сделает осознанный и успешный выбор дальнейшего профессионального обучения, ответив на вопрос: «Сумеет ли он серьезно заниматься математикой?».

Математика (как и русский язык) – предмет, изучающийся с первого по выпускной класс. Объем содержательных единиц, которыми должен оперировать старшеклассник по данному предмету, чрезвычайно велик. Следовательно, велик и объем накопившихся у учащихся за годы обучения пробелов.

Элективный курс «Встречи с модулем» поможет повысить уровень математической подготовки через решение большого класса задач, содержащих модуль, то есть повысит качество образования за счет углубления отдельных тем базовых общеобразовательных программ по математике.

В школьной программе понятие модуля вводиться в 6 классе, и впоследствии учащиеся лишь эпизодически встречаются с заданиями, содержащими модуль. Часто ученики такое задание воспринимают как новое и неожиданное и не знают, с какой стороны к нему подступиться. На базовом уровне учащиеся должны уметь выполнять задания стандартного вида (одношаговые). В процессе же изучения курса старшеклассники смогут познакомиться с различными приемами построения графиков функций, решениями уравнений и неравенств с модулем, приобретут навыки рационального поиска решения задач и построения алгоритмов, а в дальнейшем применят полученные знания и умения при подготовке к ЕГЭ, поступлению в вуз и продолжению образованию.

В изучении предметов естественно - научного цикла очень важное место занимает эксперимент и именно в процессе эксперимента и обсуждения его организации и результатов формируются и развиваются интересы ученика к данному предмету, то в математике эквивалентом эксперимента является решение задач. Ясно, что любую теорему тоже можно и нужно рассматривать как задачу, ее доказательство - как решение этой задачи, а различные следствия - как приложения.

А так как основу данного курса составляют решения разных по степени важности и трудности задач, то он способен повысить познавательный интерес учащихся к математике.

Занятия на курсе «Встречи с модулем» способствуют развитию навыков организации умственного труда и самообразования. Слушатели учатся работать с разными источниками информации и достаточно быстро конспектировать новый материал.

Таким образом, элективный курс «Встречи с модулем» призван обеспечить углубленное изучение отдельных разделов математики, повысить уровень математического мышления и сформировать навыки исследовательской деятельности.

II. Структура и содержание учебного курса.

Элективный курс «Встречи с модулем» рассчитан на **34 часа**.

Курс представлен в виде **6-и разделов**:

□□Определение и свойства модуля.

□□Графики функции, содержащие знак модуля.

□□Уравнения, содержащие модуль.

□□Неравенства со знаком модуля.

□□Уравнения, содержащие модуль и параметр.

□□Неравенства, содержащие модуль и параметр.

Принципы, положенные в основу построения элективного курса

Содержание программы элективного курса «Встречи с модулем» включает теоретический практический материал. Теоретическое содержание составляют основные понятия, способы решения задач и их обоснование. Практическое содержание-это практикум по решению задач различных типов, разного уровня сложности, в процессе которого в арсенал приемов иметодов мышления естественным образом включаются индукция и дедукция.

Формирование готовности к профессиональному самоопределению происходит на основе профессионального интереса, который проявляется в старших классах, когда учебно-профессиональная деятельность школьников становиться ведущей. Основой для формирования профессионального интереса как необходимого условия профильного обучения является познавательный интерес, его упрочение и специализация.

Знакомство с понятием модуля происходит в курсе математике в шестом классе, где дается его геометрическое толкование. В курсе алгебры 7-11класса происходит фрагментарное обращение к теме «Модуль», так как учебники алгебры под редакцией Ю. Н. Макарычев и др., алгебры и начала анализа под редакцией А. Н.Колмогорова и др. содержат лишь задачный материал, связанный с понятием модуля. В то время, как контрольно-измерительные материалы ЕГЭ по математике предъявляют очень высокие требования к уровню владения выпускниками приемами «работы с модулем». Поэтому 70% времени элективного курса отводятся на практические занятия.

Предлагаемый курс является развитием системы, ранее приобретенных программных знаний. Цель данного учебного курса создать целостное представление о теме и значительно расширить спектр задач, посильных для учащихся. Всё должно располагать к самостоятельному поиску и повышать интерес к изучению предмета. Предоставляя возможность осмыслить свойства и их доказательства, учитель развивает математическую интуицию, без которой немыслимо творчество.

Организация занятий должна несколько отличаться от урочной: ученику необходимо давать время на размышление, учить рассуждать, выдвигать гипотезы. В курсе заложена возможность дифференцированного обучения. В решении ряда задач необходимо рассмотреть несколько способов. Однако если одной группе учащихся полезно дать возможность самим открыть эти случаи, то другой – учитель может сузить требования и рассмотреть только один. Важным принципом преподавания данного курса является создание атмосферы доверия, свободного обмена мнениями.

Основные требования к учебно-методической организации занятий:

научная строгость и доказательность;

проблемное изложение материала (по возможности); усиление дедуктивного

подхода; наличие исследовательских и творческих заданий.

При организации занятий по данному курсу необходимо использовать лекции и доклады учащихся. На семинарах возможны разные формы индивидуальной и групповой деятельности. На первое место должны выйти такие организационные формы, как дискуссия, выступления с докладами или содокладами, дополняющими выступления ученика или учителя. От пассивного восприятия к продуктивной деятельности; от сообщающего обучения к дискуссиям и совместному творческому поиску, - таков принцип занятий элективного курса. Для воплощения целей и задач курса целесообразно применять технологии, включающие учащихся в активную учебно-познавательную деятельность, обеспечивающие личностное развитие каждого ученика.

Технологии обучения:

Лекционно-семинарская система обучения; Информационно-коммуникационные

технологии; использование исследовательского метода, направленного на развитие логического мышления; деятельностный метод; проблемное обучение, предусматривающее мотивацию к исследованию путем постановки проблемы, обсуждение различных вариантов решения.

Позиция педагога: при проведении занятий данного элективного курса он выступает информатором только в тех случаях, когда является единственным обладателем информации. Большую часть учебного времени учитель выполняет функции советника, консультанта, поддерживающего интеллектуальную активность учащихся, и наблюдателя за процессом практической работы учеников. Позиция равноправного участника - самая предпочтительная при проведении групповых обсуждений и индивидуальной работы.

Прогнозируемые результаты:

У учащихся должны развиться навыки организации умственного труда и самообразования. Здесь и умение воспринимать объясняемый материла, достаточно быстрого его конспектировать, с одной стороны, и умение работать с учебниками и иной литературой, с другой стороны.

Учащиеся приобретут умения и навыки решения заданий с модулем. В процессе изучения курса будет решено много полезных задач, в том, числе и абитуриентского плана. Данный курс имеет прикладное и общеобразовательное значение, способствует развитию логического мышления учащихся. Логика математического мышления помогает учащимся в рассуждениях, даже в обыденной жизни, в развитии и логическом построении речи, в способности к критическому восприятию действительности. Овладение общими умениями, навыками, способами деятельности как существенными элементами культуры является необходимым условием развития и социализации учащихся.

Учебная деятельность

Чтобы оценить динамику усвоения учениками теоретического материала и добиться от учащихся регулярных занятий, психологически очень важно предоставить подростку достаточно объективную информацию об уровне его знаний и умений, а значит, и об ожидающей его оценке. Кроме того, знание уровня владения учащимися теорией и навыками ее применения поможет внести изменения в семинарские занятия. С этой целью будут предложены небольшие домашние индивидуальные задания на выбор. Планируется выступление учеников с небольшими докладами в дополнение к лекциям учителя. Заранее подготовленное сообщение на тему, подсказанную учителем, поможет учащемуся включиться в работу на уроке, развить и проявить свое ораторское мастерство.

В конце курса предполагается работа над проектами индивидуально или в малой группе и защита их каждым учеником по выбранному разделу элективного курса.

При организации занятий необходимо планировать рефлексивную деятельность учащихся. Школьники должны понимать ценность образования как средство развития культуры личности. Уметь объективно оценивать свои учебные достижения, учитывать мнения других людей при определении собственной позиции и самооценки.

Требования к знаниям учащихся

В результате изучения курса учащиеся приобретут:

-представление об идеях и методах математики в познании действительности;

-работать с различными источниками информации;

-знания основных приемов при работе с модулем и умения:

-воспроизводить определение модуля, его свойства,

-алгоритмы построения графиков функций, содержащих модуль,

-методы решения уравнений и неравенств с модулем,

-анализировать и выбирать оптимальные способы решения,

-применять математическую символику,

-логически мыслить, рассуждать, аргументировать и анализировать полученные результаты;

-участвовать в дискуссии, отстаивая свое мнение в поиске решения задач,

-применять теоретические знания при решении нестандартных задач, содержащих модуль.

Данная программа адаптирована для профильного информационно-технологического направления.

Содержание курса

1. Определение и свойства модуля.

Вводная лекция. Обобщение теоретических знаний, связанных с понятием модуля. Аналитическое определение и геометрический смысл модуля. Свойства модуля. Преобразования различных выражений, содержащих знак модуля на основе его определения. Использование математической символики. Знаки совокупности и системы.

Практическая работа: преобразование выражений, содержащих знак модуля, с использованием приема «разбиения на промежутки».

2. Построение графиков функций, содержащих модули.

Принципы построения графиков функций с модулем:

построение графика функции $y=|f(x)|$;

построение графика функции $y=f(|x|)$;

построение графика функции $y=|f(|x|)|$

построение графика функций, содержащих модуль от выражения с переменными;

построение графика функции $|y|=|f(x)|$;

построение графика функции $|y|=f(|x|)$;

Индивидуальное задание: построение графика выбранной функции.

3. Уравнения, содержащие модули.

Систематизация различных видов уравнений и систем с модулем. Методы решения: раскрытие модуля исходя из определения; возведение обеих частей уравнения в квадрат; метод разбиения на промежутки; графический и аналитический способы решения уравнений и систем уравнений с модулем. Алгоритмы решения уравнений, содержащих модуль:

решение линейных уравнений;

решение квадратных уравнений;

решение тригонометрических уравнений;

решение показательных и логарифмических уравнений.

Тестирование по теме : решение уравнений с модулем с выбором рационального способа решения.

4. Неравенства, содержащие модуль.

Классификация различных типов неравенств с модулем и способы их решения. Алгоритмы решения неравенств, содержащих модуль.

Графический и аналитический способы решения линейных неравенств и неравенств второй степени с модулем:

неравенства, содержащие выражения $|x|$;

неравенства вида $|f(x)|>g(x)$

неравенства вида $|f1(x)| \pm |f2(x)| \pm \ldots \pm |fn(x)| > g(x)$.

Системы неравенств, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Тригонометрические неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля. Показательные и логарифмические неравенства с модулем.

Самостоятельная работа: решение неравенств с модулем с выбором рационального способа решения.

5.Модуль и параметр.

Решение уравнений и неравенств, содержащих модуль и параметр.

Аналитический и графический способы решения.

6.Защита проектов.

Формой итогового контроля может служить защита проекта или реферата.

Школьники могут написать реферат по одной из тем изученных на элективном курсе.

Учащимся, проявляющим интерес к заданиям более высокого уровня сложности, предлагается самостоятельно изучить одну из тем с последующей презентацией:

«Абсолютная величина и параметр»

«Модуль в уравнениях с параметром»

«Неравенства с параметром, содержащие модуль»

«Конструирование задач с модулем».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вавилов В. В. Задачи по математике Уравнения и неравенства. М., «Просвещение», 1999

2. Егерев В. К, Кордемский, Зайцев В. В. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗЫ, Ташкент, «Высшая школа», 1998

3. Каспаржак А. Г. «Элективные курсы в профильном обучении», М., НФПК, 2004.

4. Крамор В. С., Лунгу К. Н., Лунгу А. К.Математика, типовые примеры на вступительных экзаменах», М., АРКТИ, 2001.

5. Королева Т. М. Пособие по математике в помощь централизованного тестирования.

6. Литинский Г. И. Функции и графики, М., «Аслан», 1996

7. Никонова Е. Ю. «Встречи с модулем» Самара, СИПКРО, выпуск 2, 2003